Partie B : Etude du piégeage de particules neutres

Partie I : Modèle de THOMSON – Electron élastiquement lié
I.3 : Energie électromagnétique rayonnée par un atome d'hydrogène dans le cadre du modèle de THOMSON

1.3.1

De la question 1.2.14 :

$$\vec{p}(t) = q\overrightarrow{OP}(t) = -ez_0 \cos(\omega_0 t)\vec{u}_z \qquad (1)$$

on déduit :

$$q(t) = -e\cos(\omega_0 t) \qquad (2)$$
$$p(t) = -ez_0 \cos(\omega_0 t) = p_0 \cos(\omega_0 t) \qquad (3)$$

1.3.2

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \qquad (4)$$

Pour r très grand, ne subsistent entre les crochets que les termes qui n'ont pas de décroissance en 1/r :

$$\vec{E}(M,t) = \frac{\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 rc^2}\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)\vec{u}_\theta \qquad (5)$$

$$\vec{B}(M,t) = \frac{\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 rc^3}\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)\vec{u}_\varphi \qquad (6)$$

1.3.3

$$\frac{\left\|\vec{E}(M,t)\right\|}{\left\|\vec{B}(M,t)\right\|} = c \qquad (7)$$

Les champs électrique et magnétique sont orthogonaux, et leurs modules sont dans un rapport c : L'onde électromagnétique a localement la structure d'une onde plane.

1.3.4

$$\vec{\Pi}(M,t) = \frac{\vec{E}(M,t)\Lambda\vec{B}(M,t)}{\mu_0} \qquad (8)$$

1.3.5

Si on considère un élément de surface $\overrightarrow{ds}$ au voisinage d'un point M, le produit scalaire du vecteur de Poynting par cet élément de surface représente l'énergie électromagnétique qui traverse cet élément de surface à l'instant t. Cette énergie peut être active ou réactive.

1.3.6

$$P(t) = \iint \frac{\vec{E}(M,t)\Lambda\vec{B}(M,t)}{\mu_0} ds = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{E^2(M,t)}{\mu_0 c} r^2 \sin\theta d\theta \qquad (9)$$

$$P(t) = 2\pi \int_0^{\pi} \frac{\ddot{p}^2\left(t - \frac{r}{c}\right)\sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon_0^2 c^4 r^2 \mu_0 c} r^2 \sin\theta d\theta = 2\pi \frac{\ddot{p}^2\left(t - \frac{r}{c}\right)}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta \qquad (10)$$

$$P(t) = \frac{\ddot{p}^2\left(t - \frac{r}{c}\right)}{8\pi\varepsilon_0 c^3} \frac{4}{3} = \frac{\ddot{p}^2\left(t - \frac{r}{c}\right)}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{p}^2\left(t - \frac{r}{c}\right) \qquad (11)$$

1.3.7

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{p}^2\left(t - \frac{r}{c}\right) dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\mu_0}{6\pi c} p_0^2 \omega_0^4 \cos^2(\omega_0 t) dt = \frac{\mu_0}{6\pi c} p_0^2 \omega_0^4 \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega_0 t) dt \qquad (12)$$

$$P = \frac{\mu_0}{12\pi c} p_0^2 \omega_0^4 = \frac{p_0^2 \omega_0^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3} \qquad (13)$$

1.3.8

L'énergie électromagnétique libérée en un point de l'espace à un instant t, se propage dans l'espace à la vitesse c, en se répartissant sur l'ensemble du volume libre qu'elle rencontre. En espace libre, si cette énergie rencontre la sphère de rayon R1 à un instant t1, puis après propagation, la sphère de rayon R2 à un instant t2, l'énergie qui va traverser les surfaces de ces deux sphères sera égale à l'énergie ponctuelle libérée à l'instant t : elle traversera la première sphère à l'instant t + R1/c et la deuxième à l'instant t + R2/c.

1.4 Effet du rayonnement sur le mouvement de l'électron

1.4.1

$$P = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{e^2 z_0^2(t) \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3} \qquad (14)$$

$$E_m(t) = \frac{1}{2} m\omega^2 z_0^2(t) \qquad (15)$$

$$P = \frac{e^2 z_0^2(t)\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{1}{2} m\omega^2 z_0^2(t) \frac{2e^2\omega^2}{12 m\pi\varepsilon_0 c^3} \qquad (16)$$

On en déduit le temps caractéristique demandé :

$$\tau = \frac{6m\pi\varepsilon_0 c^3}{e^2\omega^2} \quad (17)$$

1.4.2

Pour faire un bilan énergétique sur un intervalle δt, on écrit que l'énergie mécanique Em(t+δt) à l'instant t+δt est égale à l'énergie mécanique Em(t) à l'instant t diminuée de l'énergie qui a été rayonnée pendant la durée δt.

$$E_m(t + \delta t) = E_m(t) - \delta t P(t) \quad (18)$$

où P(t) représente la puissance moyenne rayonnée à l'instant t, qui est fonction de l'amplitude des oscillations z_0, elle même fonction du temps t.

1.4.3

δt << τ :

τ représente la durée de l'émission d'énergie électromagnétique qui épuise l'énergie mécanique totale. La condition ci-dessus permet de considérer δt comme un intervalle élémentaire par rapport à la durée τ de l'évolution du système.

δt >> T :

Cette condition exprime le fait que sur l'intervalle δt, l'électron va effectuer de nombreuses oscillations, et que par conséquent, on peut utiliser l'énergie moyenne rayonnée sur une période pour calculer l'énergie dissipée par rayonnement.

De (18), on déduit :

$$E_m(t + \delta t) - E_m(t) = -\delta t \frac{E_m(t)}{\tau} \quad (19)$$

$$\frac{dE_m(t)}{E_m(t)} = -\frac{dt}{\tau} \quad (20)$$

$$Ln\left(\frac{dE_m(t)}{E_m(t)}\right) = -\frac{t}{\tau} + cte \quad (21)$$

$$E_m(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} \quad (22)$$

où K est une constante déduite de la condition initiale :

$$E_m(t) = E_m(0)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (23)$$

1.4.4

domaine du visible : 400 nm < λ <800 nm
4.10^{14} Hz < f <$7.5.10^{14}$ Hz
$1,33.10^{-15}$ s < T < $2,5.10^{-15}$ s
$2,51.10^{15}$ rd/s < ω < $4,71.10^{15}$ rd/s

En se plaçant au milieu du domaine visible, on a :

$$T = 1,9.\ 10^{-15}\ \text{s} \quad (24)$$

$$\tau = \frac{6m\pi\varepsilon_0 c^3}{e^2\omega^2} = 6\frac{9,11.10^{-31}\pi 8,82.10^{-12}\left(3.10^8\right)^3}{\left(1,6.10^{-19}\right)^2\left(3,6.10^{15}\right)} = 1,23.10^{-8}\ \text{s} \quad (25)$$

Ce qui justifie que l'on puisse considérer un δt à la fois très inférieur à τ et très supérieur à T.

1.4.5

Le mouvement de l'électron est un mouvement oscillant lentement amorti.

1.4.6

De la question 1.3.6, on déduit :

$$P(t) = \frac{\mu_0}{6\pi c}\ddot{p}^2\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\ddot{z}^2\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (26)$$

1.4.7

$$\delta W(t) = \vec{F}_R(t).dz\vec{u}_z = R(t)dz\left(\vec{u}_z.\vec{u}_z\right) = R(t)\dot{z}(t)dt \quad (27)$$

1.4.8

$$P(t)dt = -\delta W\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (28)$$

$$P(t)dt = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\ddot{z}^2\left(t - \frac{r}{c}\right)dt = K\ddot{z}^2\left(t - \frac{r}{c}\right)dt = -R(t - \frac{r}{c})\dot{z}(t - \frac{r}{c})dt \quad (29)$$

soit encore après changement de variable :

$$K\ddot{z}^2(t)dt = -R(t)\dot{z}(t)dt \qquad \text{avec} \qquad K\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \quad (30)$$

1.4.9

Intégrons la relation précédente sur une période :

$$K\int_0^T \ddot{z}^2(t)dt = -\int_O^T R(t)\dot{z}(t)dt \qquad (31)$$

Effectuons une intégration par partie sur le membre de droite :

$$\int_O^T R(t)\dot{z}(t)dt = \left[\left(\int R\right)\dot{z}(t)\right]_0^T - \int_0^T\left(\int R\right)\ddot{z}(t)dt \qquad (32)$$

Le terme entre crochets est nul, car la fonction est périodique de période T. En égalant (32) avec (31), on obtient :

$$K\int_0^T \ddot{z}^2(t)dt = \int_O^T\left(\int R\right)\ddot{z}(t)dt \qquad (33)$$

Une solution particulière de cette relation est obtenue pour :

$$\int R = K\ddot{z}(t) \quad \text{soit donc : } R(t) = K\dddot{z}(t) \qquad (34)$$

D'une manière générale, l'égalité (33) des intégrales de deux fonctions n'entraîne pas l'égalité (34) des fonctions intégrés, c'est ce qui justifie le commentaire de la fin de la page 19.

On obtient donc :

$$R(t) = K\dddot{z}(t) = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\dddot{z}(t) = \frac{2m}{3c}\frac{e^2}{4m\pi\varepsilon_0 c^2}\dddot{z}(t) = \frac{2m}{3c}r_0\dddot{z}(t) \qquad (35)$$

avec :

$$r_0 = \frac{e^2}{4m\pi\varepsilon_0 c^2} = \frac{\mu_0 e^2}{4m\pi} \qquad (36)$$

AN :

$$r_0 = \frac{4\pi.10^{-7}\left(1,6.10^{-19}\right)^2}{4\pi 9,11.10^{-31}} = 2,8.10^{-15}\ \text{m} \qquad (37)$$

1.4.10

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$-kz(t) + R(t) = m\ddot{z}(t) \qquad (38)$$

$$-kz(t) + \frac{2m}{3c}r_0\dddot{z}(t) = m\ddot{z}(t) \qquad (39)$$

$$\ddot{z}(t) + \frac{k}{m} z(t) - \frac{2}{3c} r_0 \dddot{z}(t) = 0 \qquad \ddot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) - \frac{2}{3c} r_0 \dddot{z}(t) = 0 \tag{40}$$

1.4.11

$$\underline{z}(t) = \underline{Z_0} \exp(j\Omega t) \qquad \underline{\ddot{z}}(t) = -\Omega^2 \underline{Z_0} \exp(j\Omega t) \qquad \underline{\dddot{z}}(t) = -j\Omega^3 \underline{Z_0} \exp(j\Omega t) \tag{41}$$

$$-\Omega^2 + \omega_0^2 + j\frac{2r_0}{3c}\Omega^3 = 0 \tag{42}$$

1.4.12

$$-(\omega_0 + \Delta\Omega)^2 + \omega_0^2 + j\frac{2r_0}{3c}(\omega_0 + \Delta\Omega)^3 = 0 \tag{43}$$

$$-\omega_0^2 - 2\omega_0\Delta\Omega + \omega_0^2 + j\frac{2r_0}{3c}\left(\omega_0^3 + 3\omega_0^2\Delta\Omega\right) = 0 \tag{44}$$

$$-2\omega_0\Delta\Omega + j\frac{2r_0}{3c}\left(\omega_0^3 + 3\omega_0^2\Delta\Omega\right) = 0 \tag{45}$$

$$-2\Delta\Omega + j\frac{2r_0}{3c}\left(\omega_0^2 + 3\omega_0\Delta\Omega\right) = 0 \tag{46}$$

$$2\Delta\Omega\left(-1 + j\frac{r_0\omega_0}{c}\right) = -j\frac{2r_0\omega_0^2}{3c} \tag{47}$$

$$\Delta\Omega = \frac{j\dfrac{r_0\omega_0^2}{3c}}{1 - j\dfrac{r_0\omega_0}{c}} \tag{48}$$

Dans l'approximation $r_0\omega_0 << c$, on peut écrire :

$$\Delta\Omega \approx j\frac{r_0\omega_0^2}{3c} \tag{49}$$

1.4.13

$$\underline{z}(t) = \underline{Z_0} \exp(j\Omega t) = \underline{Z_0} \exp\left(-\frac{r_0\omega_0^2}{3c} t\right) \tag{50}$$

$$z(t) = \mathrm{Re}\{\underline{z}(t)\} = \mathrm{Re}\{\underline{Z_0}\} \exp\left(-\frac{r_0\omega_0^2}{3c} t\right) \tag{51}$$

L'énergie cinétique est une fonction de $\dot{z}^2(t)$, et a donc une évolution de la forme :

$$E_c(t) = A\exp\left(-2\frac{r_0\omega_0^2}{3c}t\right) \quad (52)$$

Si on compare cette évolution à l'énergie mécanique donnée en 1.4.3 :

$$E_m(t) = E_m(0)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (53)$$

les deux évolutions sont comparables à condition de poser :

$$\tau = \frac{3c}{2r_0\omega_0^2} = \frac{6c^3\pi\varepsilon_0 m}{e^2\omega_0^2} \quad (54)$$

soit donc l'expression de τ obtenue en 1.4.1 en remplaçant ω_0 par ω.

1.4.14

$$R(t) = \frac{2mr_0}{3c}\dddot{z}(t) = -m\gamma\dot{z}(t) \quad (55)$$

Pour un mouvement oscillant à la pulsation ω, on a la relation :

$$\dddot{z}(t) = -\omega^2\dot{z}(t) \quad (56)$$

On en déduit :

$$\gamma = \frac{2m\omega^2 r_0}{3c} \quad (57)$$

1.5.1

De 1.2.11 : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, De 1.2.7 : $k = \frac{e^2}{4\pi R^3\varepsilon_0}$ on déduit :

$$\omega_0 = \frac{e}{\sqrt{4\pi m R^3\varepsilon_0}} = \frac{1{,}6.10^{-19}}{\sqrt{4\pi 9{,}11.10^{-31}(0{,}5.10^{-10})^3 8{,}85.10^{-12}}} = 4{,}6.10^{16}\text{ rd/s} \quad (58)$$

$\nu_0 = \omega_0 / 2\pi = 7{,}16.10^{15}$ Hz
$\lambda_0 = 4.19.10^{-8}$ m

radiation dans l'ultra violet, donc hors des fréquences du visible, contrairement aux raies de l'atome d'hydrogène.

De 1.4.4, on a déjà calculé :

$$\tau = \frac{6m\pi\varepsilon_0 c^3}{e^2\omega^2} = 6\frac{9{,}11.10^{-31}\pi 8{,}82.10^{-12}(3.10^8)^3}{(1{,}6.10^{-19})^2(3{,}6.10^{15})} = 1{,}23.10^{-8}\text{ s} \quad (59)$$

1.5.2

mouvement oscillant amorti, d'enveloppe proportionnelle à $\exp(-t/\tau)$

1.5.3

D'après 1.2.6, le potentiel au centre de la sphère est égal à :

$$V(0) = \frac{3e}{8\pi\varepsilon_0 R} \qquad (60)$$

C'est, en électron-volt, l'énergie qu'il faudra fournir à un électron situé au centre de la sphère, pour l'arracher à l'influence du noyau.

$$\text{AN : } E_i = \frac{3.1{,}6.10^{19}}{8\pi 8{,}85.10^{-12} 0{,}5.10^{-10}} = 43{,}16 \text{ eV} \qquad (61)$$

1.5.4

E_i représente l'énergie d'ionisation. Pour l'atome d'hydrogène, elle est égale à 13,6 eV. On peut estimer que l'ordre de grandeur est raisonnable.