Partie B : Etude du piégeage de particules neutres

Partie I : Modèle de THOMSON – Electron élastiquement lié
I.1 : préliminaires

1.1.1

- noyau : 1 proton – Des isotopes existent avec 0 neutron (protium), 1 neutron (deuterium) ou 2 neutrons (tritium : isotope instable et fortement radioactif)
- 1 électron périphérique
- ordre de grandeur du noyau : 10^{-15} m
- ordre de grandeur de l'atome : 10^{-10} m

1.1.2

Force électrostatique : $$\left|\vec{F}_E\right| = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (1)$$

Force gravitationnelle : $$\left|\vec{F}_G\right| = G\,\frac{mm_p}{r^2} \qquad (2)$$

$$\frac{\left|\vec{F}_G\right|}{\left|\vec{F}_E\right|} = 4\pi\varepsilon_0 G\,\frac{mm_p}{e^2} \qquad (3)$$

$$\text{AN : } \frac{\left|\vec{F}_G\right|}{\left|\vec{F}_E\right|} = 4\pi.8{,}85.10^{-12}.6{,}67.10^{-11}\,\frac{9{,}11.10^{-31}.1{,}67.10^{-27}}{\left(1{,}6.10^{-19}\right)^2} = 4{,}4\ .\ 10^{-40} \qquad (4)$$

La force gravitationnelle est donc complètement négligeable devant la force électrostatique.

I.2 : Description du modele

1.2.1

Equation de MAXWELL – GAUSS : $$\mathrm{div}\left(\vec{E}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (5)$$

Cette égalité est conservée si elle est sommée sur un volume V défini par une surface fermée S :

$$\iiint_{(V)} (\vec{\nabla}.\vec{E}).dv = \frac{1}{\varepsilon_0}.\iiint_{(V)} \rho.dv \qquad (6)$$

Lorsque les conditions de continuité et de dérivation sont réunies, on peut appliquer le théorème d'OSTROGRADSKY qui montre que le flux d'un vecteur à travers une surface fermée (S) délimitant un volume (V) est égal à l'intégrale sur le volume de la divergence de ce vecteur

$$\oiint_{(S)} \vec{E}.d\vec{s} = \iiint_{(V)} (\vec{\nabla}.\vec{E}).dv \qquad (7)$$

On en déduit :

$$\oiint_{(S)} \vec{E}.d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}.\iiint_{(V)} \rho.dv = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} \qquad (8)$$

Le flux du vecteur champ électrique à travers toute surface fermée est égal à la somme des charges intérieures à cette surface divisé par ε_0.

1.2.2

La charge totale portée par le noyau est égale à +e.
Le noyau est considéré comme une sphère de rayon R, donc de volume : $4\pi R^3/3$.
Cette densité volumique est supposée uniforme, elle prend donc la valeur :

$$\rho = \frac{e}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \frac{3e}{4\pi R^3} \qquad (9)$$

1.2.3

A cause de la symétrie sphérique, le champ électrique créé par le noyau ne dépend pas de θ et de φ : il ne dépend donc que de r.

La symétrie sphérique impose également un champ électrique qui ne dépend que du vecteur $\vec{u}_r$. D'où la forme proposée pour décrire ce champ.

1.2.4

L'application du théorème de GAUSS sur une surface de GAUSS constituée par une sphère de rayon r < R donne :

$$\oiint_{(S)} \vec{E}.d\vec{s} = \oiint_{(S)} E.ds \qquad \text{car les deux vecteurs sont colinéaires} \qquad (10)$$

$$\oiint_{(S)} E.ds = E\oiint_{(S)} ds \qquad \text{car le vecteur champ électrique est constant sur la surface de GAUSS} \qquad (11)$$

$$E\oiint_{(S)} ds = E.4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho dv = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\iiint_V dv = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3 \qquad (12)$$

On en déduit :

$$E(r) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{1}{3} r = \frac{3e}{4\pi R^3 \varepsilon_0}\frac{r}{3} = \frac{e}{4\pi R^3 \varepsilon_0} r \qquad \text{pour } r < R \qquad (13)$$

Pour r > R, on reprend la relation (12), sachant que la totalité de la charge est maintenant contenue dans la surface de GAUSS :

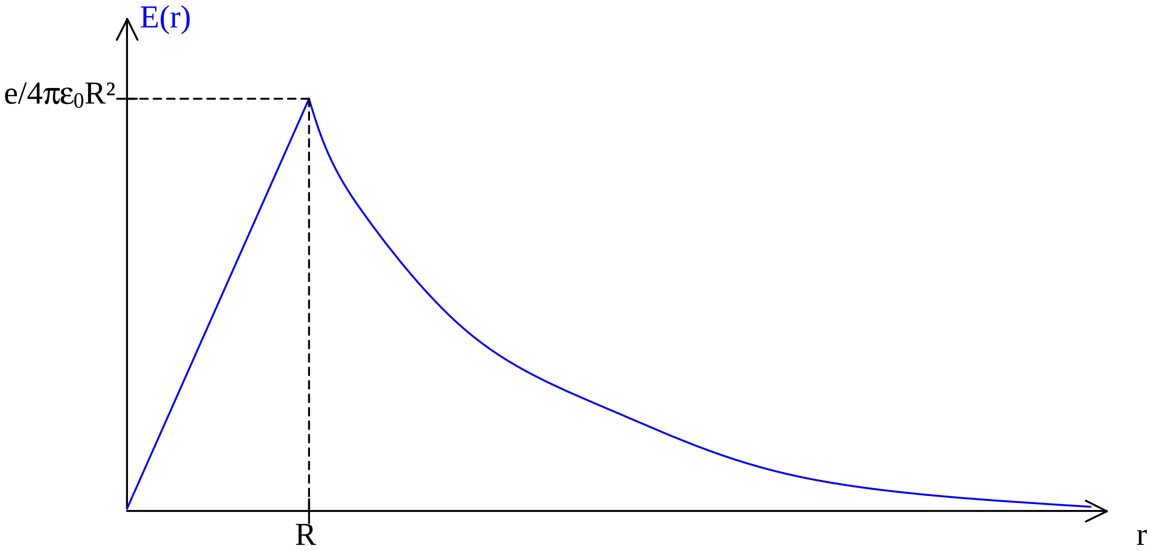
$$E\oiint_{(S)} ds = E.4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho dv = \frac{e}{\varepsilon_0} \qquad (14)$$

0n en déduit :

$$E(r) = \frac{e}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \qquad (15)$$

A l'extérieur de la sphère tout se passe comme si la totalité de la charge était concentrée en son centre.

allure de E (r) :



1.2.5

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(v) \qquad (16)$$

Pour r >=R,

$$v(r) = -\int E(r)dr = -\int \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right) + cte = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (17)$$

puisque v(∞) = 0.

Pour r < R :

$$v(r) = -\int E(r)dr = -\int \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R^3}rdr = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(\frac{r^2}{2}\right) + cte \qquad (18)$$

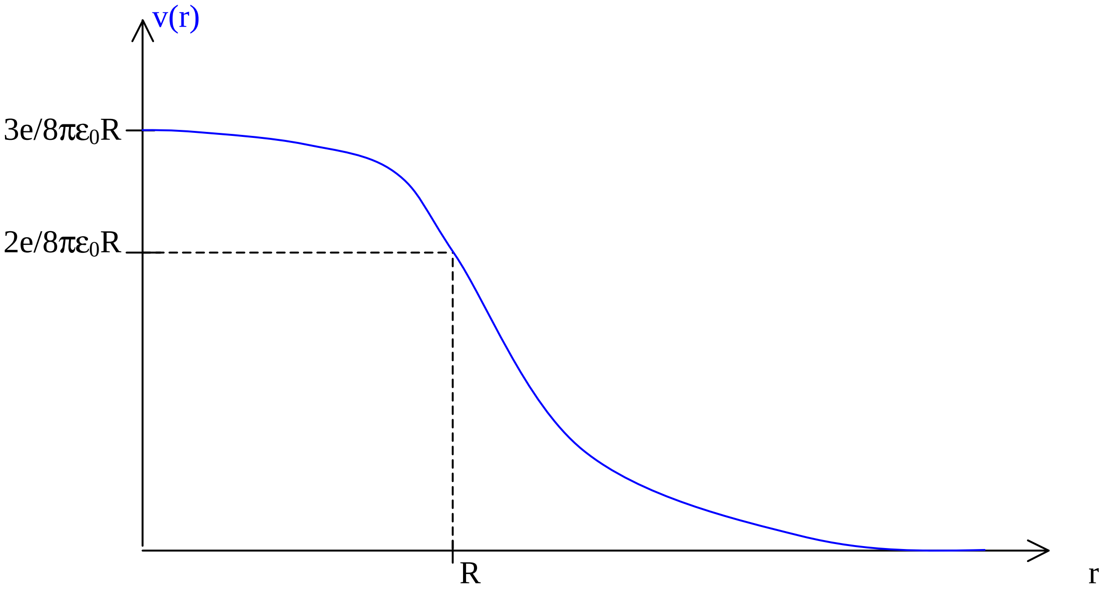
La constante est déterminée en écrivant la continuité du potentiel en r = R :

$$-\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\frac{R^2}{2} + \text{cte} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad (19)$$

$$\text{cte} = \frac{3e}{8\pi\varepsilon_0 R} \qquad (20)$$

$$v(r) = -\frac{e}{8\pi\varepsilon_0 R^3}r^2 + \frac{3e}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{e}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(-\frac{r^2}{R^2}+3\right) \qquad (21)$$

1.2.6



1.2.7

$$\vec{F} = q\vec{E} = -e\frac{e}{4\pi R^3\varepsilon_0}r\vec{u}_r = -kr\vec{u}_r = -k\overrightarrow{OP} \qquad (22)$$

avec $$k = \frac{e^2}{4\pi R^3\varepsilon_0} \qquad (23)$$

1.2.8

Le champ électrostatique dans la sphère agit sur l'électron comme un ressort avec une force de rappel qui tend toujours à ramener l'électron vers le centre de la sphère, d'où l'image d'un électron élastiquement lié au centre de la sphère symbolisant le proton.

1.2.9

Une force est dite centrale lorsque sa direction passe par un point fixe quel que soit l'instant considéré. De par la relation établie à la question 1.2.7, la force de rappel de l'électron passe toujours par le point O : c'est donc une force centrale.

1.2.10

Le moment cinétique en O de l'électron situé au point P, de masse m, et animé d'une vitesse V s'écrit :

$$\vec{\sigma} = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{V} \tag{24}$$

Si on dérive son expression par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} \wedge m\vec{V} + \overrightarrow{OP} \wedge m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{V} \wedge m\vec{V} + \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = 0 \tag{25}$$

car la force est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OP}$ d'après la question précédente.

Puisque le moment cinétique ne dépend pas du temps, c'est donc une constante du mouvement.

Il s'ensuit que les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\vec{V}$ appartiennent à un plan fixe orthogonal au moment cinétique : le mouvement de l'électron s'effectue donc dans ce plan.

1.2.11

On applique la relation fondamentale de la dynamique à l'électron :

$$-k\overrightarrow{OP}(t) = m\frac{d^2\left(\overrightarrow{OP}(t)\right)}{dt^2} \tag{26}$$

$$\frac{d^2\left(\overrightarrow{OP}(t)\right)}{dt^2} + \frac{k}{m}\overrightarrow{OP}(t) = 0 \tag{27}$$

$$\frac{d^2\left(\overrightarrow{OP}(t)\right)}{dt^2} + \omega_0^2\overrightarrow{OP}(t) = 0 \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{28}$$

1.2.12

La solution générale de l'équation du second ordre (28) peut se mettre sous la forme :

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}(t) = \vec{A}\cos(\omega_0 t) + \vec{B}\sin(\omega_0 t) \tag{29}$$

où le vecteurs sont les constantes à déterminer à partir des conditions initiales :

$$\text{A } t = 0, \text{ on a } \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 \text{ et donc : } \vec{A} = \vec{r}_0 \tag{30}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OP}(t)}{dt} = -\vec{A}\omega_0\sin(\omega_0 t) + \vec{B}\omega_0\cos(\omega_0 t) = \vec{v}_0 \tag{31}$$

$$\text{et donc } \vec{B} = \frac{1}{\omega_0}\vec{v}_0 \tag{32}$$

On en déduit :

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}(t) = \vec{r}_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\vec{v}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \qquad (33)$$

La trajectoire est une ellipse.

<u>1.2.13</u>

Si l'électron est au repos à l'instant t = 0, on obtient :

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}(t) = \vec{r}_0 \cos(\omega_0 t) = z_0 \cos(\omega_0 t)\vec{u}_z \qquad (34)$$

<u>1.2.14</u>

$$\vec{p}(t) = q\overrightarrow{OP}(t) = -ez_0 \cos(\omega_0 t)\vec{u}_z \qquad (35)$$

<u>1.2.15</u>

$$\vec{v}(t) = -z_0\omega_0 \sin(\omega_0 t)\vec{u}_z \qquad (36)$$

$$E_c(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(z_0\omega_0 \sin(\omega_0 t))^2 = \frac{1}{2}mz_0^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t) \qquad (37)$$

<u>1.2.16</u>

La force de rappel qui s'exerce sur l'électron est de la forme :

$$\vec{F} = -kz(t)\vec{u}_z$$

d'où on déduit son énergie potentielle :

$$E_p(t) = \int_0^z kzdz = \frac{1}{2}kz^2 = \frac{1}{2}kz_0^2 \cos^2(\omega_0 t) \qquad (38)$$

avec $k = m\,\omega_0{}^2$ d'après (28)

$$E_p(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 z_0^2 \cos^2(\omega_0 t) \qquad (39)$$

<u>1.2.17</u>

On en déduit $E_m(t) = E_c(t) + E_p(t)$

$$E_m(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 z_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 z_0^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 z_0^2 \qquad (40)$$

L'énergie mécanique est une constante du mouvement car elle est indépendante du temps. Le système étant considéré comme isolé, ce résultat est cohérent.